FACULDADE PATOS DE MINAS-FPM
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ADRIANO RIBEIRO

HISTÓRIA DA GEOMETRIA NÃO EUCLIDIANA

PATOS DE MINAS
2016

ADRIANO RIBEIRO

HISTÓRIA DA GEOMETRIA NÃO-EUCLIDIANA

Artigo apresentado como requisito parcial para obtenção do título de Graduado em Licenciatura em Matemática pela Faculdade Patos de Minas.

Orientador: Prof. Me. Túlio Guimarães

PATOS DE MINAS
2016

ADRIANO RIBEIRO

(Esta folha tem que pedir para substituir quando for imprimir e colocar a assinada)

HISTÓRIA DA GEOMETRIA NÃO-EUCLIDIANA

Trabalho de Conclusão de Curso aprovado em 17novembro de 2016, pela comissão examinadora constituída pelos professores:

Orientador: ____
Prof. º. Esp. Túlio Guimarães
Faculdade Patos de Minas

Examinador: ____
Prof. º. Esp. Nome completo
Faculdade Patos de Minas

Examinador: ____
Prof.ª. Esp. Nome completo
Faculdade Patos de Minas

HISTÓRIA DA GEOMETRIA NÃO-EUCLIDIANA

Adriano Ribeiro*

Túlio Guimarães**

RESUMO

De acordo com geometria euclidiana, o estudo dirigido após o quinto postulado o qual afirmava que, se uma reta, interceptando duas outras, forma ângulos internos de um mesmo lado cuja soma é menor que dois retos, então estas duas retas, se prolongadas infinitamente, encontram-se naquele lado cuja soma dos ângulos internos é menor que dois retos.Acredita-se, então que, depois de várias tentativas e estudo sobre o quinto postulado foi descoberta uma nova geometria, a geometria hiperbólica, em que se negava o quinto postulado, e afirmava que, por um ponto fora de uma reta passa mais de uma reta paralela à reta dada. Nesse sentido, pode dizer que a geometria hiperbólica é tão consistente quanto à geometria euclidiana, e abre vários caminhos para matemática, principalmente para os professores e alunos.Este trabalho foi desenvolvido de forma exploratória e qualitativa sobre o tema: A história da geometria não euclidiana. Com base em leituras de livros impressos, artigos científicos, teses, monografias, artigos em revistas. O período das publicações será preferencialmente por fontes datadas entre o ano de 2000 e 2016. A pesquisa foi realizada entre fevereiro a novembro de 2016 junto com o fechamento.

Palavras-Chave: Geometria não euclidiana. Euclides. Hiperbólica.

ABSTRACT

According to Euclidean geometry, the study driven by the fifth postulate which says that if one line, intersecting two others, forms internal angles of the same side whose sum is less than two straights, then these two lines, if infinitely prolonged, lie in the side whose sum of internal angles is less than two straights. It is then believed that after several attempts and study about the fifth postulate a new geometry was discovered, the hyperbolic geometry, in which the fifth postulate was denied, and stated that for a point outside a straight line, it passes more than one line parallel to the given line. In this sense, it can be said that hyperbolic geometry is as consistent as Euclidean geometry, and opens many avenues for mathematics, especially for teachers and students. This work was developed in an exploratory and qualitative way on the theme: The history of non - Euclidean geometry. Based on readings from printed books, scientific articles, theses, monographs, scientific papers. The period of publications will preferably be by sources dated between the year 2000 and 2016.

*Graduando em Matemática pela Faculdade Patos de Minas (FPM). adriano1205ribeiro@gmail.com
**Graduado em Matemática (UNICERP), mestre em matemática (UFU). Professor da Faculdade de Patos de Minas (FPM). prof.tuliofpm@yahoo.com.br

The survey will be conducted between February and November 2016 with the ending.

Keywords: Non-Euclidean geometry, Euclid, hyperbolic.

1 INTRODUÇÃO

A história da matemática abrange muitos caminhos, tem-se a seguir um pouco da história da geometria não euclidiana, um tema bem complexo entre os grandes matemáticos. O estudo da nova geometria tem como objetivo, mostrar a importância da geometria não euclidiana ou geometria hiperbólica, e que ela é tão consistente quanto a geometria de Euclides (BONGEOVANNI; JAHN, 2010)

Verificar a relação entre estas duas geometrias. A nova geometria surgiu após Euclides, expor seus axiomas ou postulados. Foram cinco postulados, a partir do quinto postulado, houve, entre os grandes matemáticos, muitas dúvidas sobre esse axioma, que nada mais era o postulado das paralelas (Se uma reta corta duas outras, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então as duas retas, se continuadas, encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos).

Os gênios da matemática que se aventuraram-se no estudo, para provar que o quinto postulado de Euclides não tinha êxito, e que podia ser considerado como consciência dos quatro primeiros, tiveram muito sucesso em seus trabalhos e foi provado que o postulado de Euclides estava errado, chamado hoje de postulado das paralelas(BONGEOVANNI; JAHN, 2010).

Ao analisar a descoberta de uma nova geometria, temos como princípios, incluí-la ao ensino fundamental, médio e superior, pois a maioria dos alunos e professores de fato não conhecem a nova geometria, e o quanto ela é importante para nosso aprendizado, e a motivação a pesquisar novas teorias (BONGEOVANNI; JAHN, 2010)

2 A RELAÇÃO ENTRE A GEOMETRIA EUCLIDIANA E HIPERBÓLICA

A geometria não euclidiana segundo Bongeovanni e Jahn (2010) tem uma história bastante complexa. Euclides foi o criador do texto matemático grego mais antigo, uma obra completa, chamada “os elementos”. Uma obra constituída de 13 livros, em ordem lógica, livros de geometria euclidiana. O primeiro livro foi o principal para o surgimento da geometria não euclidiana, a partir de algumas definições, 9 axiomas, e 5 postulados, Euclides deduz 465 teoremas. Os postulados eram preposições que se pedia que fosse aceito sem demonstração e segundo a tradução de VITRAC eram cinco.

Os mesmos autores acima afirmam que:

> Os Elementos de Euclides. O exemplo mais bem acabado, provindo da Grécia, da matemática como uma ciência dedutiva é-nos fornecido pelos Elementos de Euclides. Atendendo ao preceito que comanda: “Primeiro as primeiras coisas”, comecemos pelo título da obra, Elementos. Nosso conhecimento da história inicial da geometria grega depende de notícias espalhadas em escritores antigos, muitas das quais provieram de um trabalho que, infelizmente, tragado pelo apetite voraz do tempo, não chegou até nós - a História da Geometria, escrita por Eu demo de Rhodes, um dos principais discípulos de Aristóteles (BONGIOVANNI; JAHN, 2010,p. 2).

Então,pode-se dizer que Euclides fixou como ponto de partida um sistema axiomático com cinco postulados.

> **1º- Postulado:** Pode-se traçar uma reta ligando quaisquer dois pontos. Observação: a palavra *reta* na obra de Euclides equivale ao nosso segmento de reta. É um postulado que garante a existência do segmento.**2º- Postulado:** pode-se continuar qualquer reta finita continuadamente em uma reta.Observação: Esse postulado garante a existência da reta.**3º- Postulado:** pode-se traçar um círculo com qualquer centro e qualquer raio.Observação: Esse postulado garante a existência da circunferência.**4º- Postulado:** Todos os ângulos retos são iguais.**5º- Postulado:** Se uma reta corta duas outras, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então as duas retas, se continuadas, encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos.

Observação: o 5º postulado é também conhecido como postulado das paralelas e garante a unicidade da paralela. A partir desta afirmação, surgiu uma nova geometria a geometria não euclidiana ou hiperbólica (BONGIOVANNI; JAHN, 2010,p. 2).

Bongeovanni e Jahn (2010) acreditam que o modelo axiomático dos elementos não se refere ao quinto postulado ou postulado das paralelas e sim os quatro primeiros axiomas, que eram demonstrações lógico-dedutivas. A geometria euclidiana teve conhecimento, a partir do século VI a.C., por Tales de Mileto que implantou na matemática uma preocupação demonstrativa. Então a geometria de Euclides vem assumindo um aspecto de proposições logicamente ordenadas, cada preposição é demonstrada a parte de proposiçõesanteriores, que são chamadas de preposições evidentes entre si, que hoje são chamadas de postulado ou axiomas.

> Não sabemos se Euclides escreveu os Elementos para uso no ensino, ou apenas para reunir o conhecimento matemático da época. Naquele tempo não haja a preocupação pedagógica dos dias de hoje, de sorte que Euclides alcançou os dois objetivos; e os Elementos foram muito usados no aprendizado da Matemática por mais de dois milênios. No século XIX já havia outros livros de Geometria, didaticamente mais adequados ao ensino, notadamente o livro de Legendre, que teve muitas edições em várias línguas, inclusive o português. Esse livro foi muito usado nas escolas brasileiras por quase todo o século XIX (BONGIOVANNI; JAHN, 2010,p. 3).

Sabe-se pouca informação sobre Euclides que teria vivido por volta de 300 a.C. e tão pouco dele que sabemos vem dos comentários de *Proclus*(410-485), um autor que viveu 700 anos depois de Euclides. Mesmo *Proclus* (Filósofo grego), tinha dificuldade de saber a época que Euclides viveu. A preocupação com os fundamentos da matemática remonta os gregos da antiguidade. Muitos têm o equívoco de pensar que os elementos é uma obra apenas sobre geometria. Na verdade, há muito de aritmética e álgebra em vários livros dos elementos (BONGEOVANNI; JAHN, 2010)

Outro equívocoé pensar que os fatos geométricos dos elementos sejam expressos numericamente como é para nos hoje. Ex:enquanto para nós a área de um triângulo é dada por uma fórmula encurtando metade do produto da base pela altura, para Euclides a área de um triângulo é metade da área de um paralelogramo que se obtém com a união de dois triângulos iguais ao triângulo dado; a área do paralelogramo é igual à área de um retângulo de mesma base e mesma altura (BONGIOVANNI; JAHN, 2010).

> A Geometria de Euclides é a mais conveniente e, em consequência, a que continuaremos a usar para construir nossas pontes, túneis, edifícios e rodovias. As geometrias de Lobachevsky, ou de Riemann, se devidamente utilizadas, serviriam da mesma forma. Nossos arranha-céus se manteriam, assim como nossas pontes, túneis e rodovias; nossos engenheiros não. A Geometria de Euclides é mais

> fácil de ensinar, enquadra-se mais rapidamente no bom senso mal orientado, e, acima de tudo, é mais fácil de usar(BONGIOVANNI; JAHN, 2010,p. 4)

3 O QUINTO POSTULADO DE EUCLIDES, E OS GRANDES MATEMÁTICOS QUE SE AVENTURARAM NO SEU ESTUDO

Abreu (2012) mostra que o quinto postulado de Euclides, no decorrer de muito tempo, provocou suspeita nos matemáticos, que talvez pudesse ser provada pelos axiomas da chamada geometria neutra. O próprio Euclides tinha dúvidas em seu quinto postulado se era mesmo um axioma, utilizando provas e evidencias na sua 29ª proposição. Por cerca de 2000 anos matemáticos famosos tentaram provar o quinto postulado. Foi até que no século XIX, por volta de 1829, ocorreu a descoberta de uma nova geometria, uma geometria não euclidiana, tão consistente quanto à geometria de Euclides. A descoberta da geometria hiperbólica é devido aos matemáticos: “Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), matemático alemão.JánosBolyai (1802-1860), matemático húngaro.Nikolai Ivanovich Lobachevsky(1792-1856), matemático russo. ” (ABREU, 2012,p. 9).

Para Abreu (2012) geometria hiperbólica também apresenta o modelo do disco de Poincaré, que nada mais é um isomorfismo do mesmo. No disco de Poincaré, o plano hiperbólico é definido a partir da região limitada por uma circunferência.

A história nos diz que Gauss, Bolyai e Lobachevsky desenvolveram a geometria hiperbólica ao mesmo tempo. Mas o primeiro a publicar seus trabalhos, cabendo ele a honra da descoberta foiLobachevsky, ele também chamou a geometria de imaginária. De acordo com o primeiro trabalho de Lobachevsky sobre a geometria não euclidiana foi publicado, em 1829, no KasanBulletin.

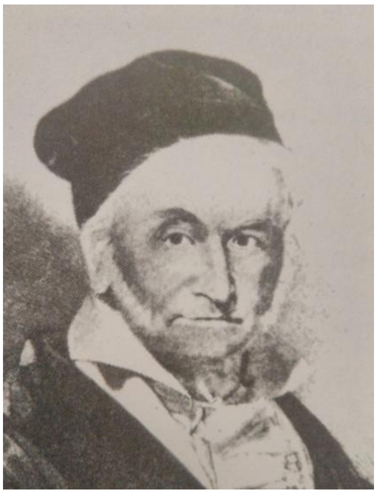
Segundo Eves (1964), homens abordaram a questão através do quinto postulado na forma *playfair*, com as três possibilidades seguintes:

Por um ponto dado, pode-se traçar mais do que uma, exatamente uma ou nenhuma paralela a uma reta dada.

Essas conclusões são dadas como hipóteses do ângulo agudo, reto ou obtuso. Assim a infinidade da reta, exclui o terceiro caso facilmente.

Gauss talvez tenha sido o primeiro a ter conclusões consistentes à hipótese do ângulo agudo, mas, nunca publicou nada a respeito e por isso, a honra foi dividida entre Bolyai e Lobachevsky. Bolyai publicou suas primeiras conclusões em 1832 num apêndice de um livro de matemática de seu pai. Mas Lobachevsky já havia publicado descobertas semelhantes em 1829-1830, mas, devido à falta de informação e a lenta comunicação naquela época, seu trabalho permaneceu ignorado por vários anos.

Figura 1 - Carl Friedrich Gauss (biblioteca do congresso)



Fonte: (EVES, 1964, p. 521)

O Príncipe Dos Matemáticos (Carl Friedrich Gauss), um homem com dedicação enorme com a matemática e com um talento impressionante, Gauss se destaca nos séculos XVIII e XIX como um colosso de rodes da matemática. Ele é universalmente considerado como maior matemático do século XIX e, ao lado de Arquimedes e Isaac Newton, como um dos maiores de todos tempos.

Gauss era uma criança prodígio, dessas que são muito raras de ser encontradas, dentre muitas descobertas ele foi um dos criadores da geometria não euclidiana dividida em geometria hiperbólica ou esférica.

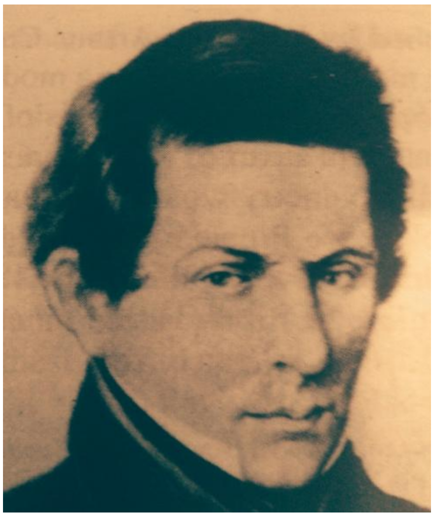
Gauss acreditava que a matemática, por inspiração, deveria atingir o mundo real. Conforme colocou Wordsworth: “A sabedoria muitas vezes está perto quando nos abaixamos do que quando nos levantamos. ”

Figura 1 - JANOS BOLYAI

Fonte: (Wikipédia, a enciclopédia livre)

Bolyai era um oficial húngaro do exército austríaco, filho de Farkas ou (Wolfgang) Bolyai, professor provinciano de matemática, amigo de Gauss de muitos anos.Farkas foi quem estimulou Bolyai a estudar o quinto postulado de Euclides ou (postulado das paralelas). Foi em 1823 que JanosBolyai começou a entender os verdadeiros problemas que enfrentava e, em uma carta escrita a seu pai, que mostrava muito interesse e que ia publicar sobre a teoria das paralelas, logo que arrumasse tempo, e oportunidade para pôr seu material em dia. O pai insistiu que seu trabalho fosse publicado como um apêndice de um alentado trabalho semi-filosófico seu,sobre matemática elementar, em dois volumes. Finalmente em 1829, ele submeteu o manuscrito a seu pai e depois em 1832, o ensaio aparecia como um apêndice de vinte e seis páginas do primeiro volume do trabalho de seu pai. Depois disso JanosBolyai não publicou mais nada a respeito, embora tivesse deixado uma pilha de manuscrito. Seu interesse era com a “ciência absoluta do espaço” referindo com isso à coleção das proposições que independem do postulado das paralelas e que, por consequência, valem tanto na geometria euclidiana como na nova geometria.

Figura 2 - NICOLAI IVANOVITCH LOBACHEVSKY (Coleção da Biblioteca Pública de Nova York)



Fonte: (EVES, 1964, p. 545)

Nicolai IvanovitchLobachevsy passou a maior parte de sua vida na universidade de Kazan, foi aluno, depois professor de matemática e algum tempo depois como reitor. Em 1829 e 1830 no *Kazan Bulleltin,* publicou seu primeiro artigo sobre a geometria não-euclidiana, dois ou três anos antes da publicação de Bolyai. Mas como a Rússia não deu muita atenção a essa memória e, por ser escrita em russo praticamente não ia ser encontrada em outros lugares. Na expectativa de alcançar um número maior de eleitores, em 1840, ele publicou um pequeno livro escrito em alemão intitulado *GeometrischeUntersuchungenZurTheorie der Parallelliniem*(investigação Geométricas sobre a Teoria das Paralelas). Em 1855, um ano antes de sua morte e algum tempo depois de ficar cego, uma interpelação final, mas concentrada, em francês, com o título *Pangéométrie* (Pangeometria).

As informações naquela época eram tão lentas, que Gauss com certeza jamais ouviria falar dos trabalhos de Lobachevsky, antes mesmo do texto alemão citado; e não teve o conhecimento de JanosBolyai antes de 1848. Lobachevsky não viveu o suficiente, para ver que seu trabalho, tinha um reconhecimento amplo, hoje a geometria não-euclidiana desenvolvida por ele é chamada de geometria de*Lobachevsky.*

Acredita-se que Lobachevsk,teve grande importância na nova geometria a geometria não-euclidiana, que com seus trabalhos e livros publicados.

Afirma Eves (1964) com a separação confirmada do postulado das paralelas da geometria euclidiana, com a tese do ângulo agudo.Beltrami, Arthur Cayley, Felix Klein, Henry Poincaré e outros, criaram um método para construir um modelo na geometria euclidiana, de tal forma que o desenvolvimento especulativo da tese do ângulo agudo pudesse ser interpretado da forma correta no espaço euclidiano. Então, qualquer incoerência na geometria não-euclidiana implicaria uma incoerência correspondente na geometria euclidiana.

Veja a seguir alguns exemplos:

- a + b = b + a (propriedade comutativa da adição).
- a x b = b x a (propriedade comutativa da multiplicação).
- (a + b) + c = a + (b + c) (propriedade associativa da adição).
- (a x b) x c = a x (b x c) (propriedade associativa da multiplicação).
- a x (b + c) = (a x b) + (a x c) (propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição) (EVES, 1996)

Georg Friedrich BernnhardRiemann (1826-1866), em 1854, afirmou que a reta era infinita. E com pequenos ajustes nos postulados anteriores, podemos criar uma nova geometria não euclidiana concreta a parte da tese do ângulo obtuso. Em 1871, Klein batizou as geometrias de Bolyai e Lobachevsky, a de Euclides e a de Riemann de geometria hiperbólica, geometria parabólica, geometria elíptica, respectivamente(EVES, 1996)

Acredita-se que a geometria não euclidiana é tão consistente quanto as teorias de Euclides.

> Uma consequência de alcance muito maior foi a libertação da geometria de seus moldes tradicionais. Despedaçou-se uma convicção secular e profundamente arraigada de que apenas uma geometria era possível e abriu-se um caminho para a criação de muitos outros sistemas geométricos. Os postulados da geometria tornaram-se, para os matemáticos, meras hipóteses cuja veracidade e falsidade físicas não lhes diziam respeito; o matemático pode tomar seus postulados para satisfazer seus gostos, desde que eles sejam consistentes entre si. As características de “auto-evidência” e “veracidade” atribuída aos postulados desde os tempos dos gregos deixaram de ser consideradas pelos matemáticos. Com a possibilidade de inventar geometrias puramente “artificiais”, tornou-se evidente que o espaço físico devia ser visto como um conceito empírico derivado de nossas experiências exteriores e que os postulados das geometrias, formulados para descrever o espaço físico, são simplesmente expressões dessas experiências, como as leis de uma ciência física. O postulado de Euclides, por exemplo, na medida em que tenha interpretar o espaço real, revela ter o mesmo tipo de validade da lei de queda livre dos corpos de Galileu; isto é, ambas são leis que decorrem da observação e ambos são suscetíveis de verificação dentro dos limites do erro experimental. Esse ponto de vista, de que a geometria, quando aplicada ao espaço, é uma ciência experimental, choca-se fortemente com a

> teoria do espaço de Emmanuel Kant (1724-1804), que dominava o pensamento filosófico à época da geometria de Lobachevsky. A teoria Kantiana sustentava que o espaço era uma estrutura já existente no espírito humano,e que os postulados da geometria euclidiana são juízos a priori impostos ao espírito humano, e que sem esses postulados não é possível nenhum raciocínio consistente sobre o espaço. Que este ponto de vista não é sustentável prova-o a criação da geometria de Lobachevsky. A teoria de Kantiana predominava tão amplamente naquele tempo que quem defendesse um ponto de vista contrário correria o risco de ser considerado meio maluco. Foi o desejo de evitar os protestos dos "beócios" que impediu Gauss de publicar seus pontos de vista sobre a geometria não-euclidiana. (EVES, 1996,p. 544)

De acordo com Boyer (1996), em 1955 quando Gauss veio a falecer, acreditava-se em geral que não encontraríamos ninguém, que fosse tão dedicado a matemática igual a ele. Jules Henri Poincaré provou que essa conclusão estava errada, que acreditou na matemática como seu domínio.Poincaré nasceu em Nancy, uma cidade que abrigaria grandes matemáticos no século vinte. Ele era doutorado em equações diferenciais (não métodos de resolução, mas teoremas de existência) uma de mais célebres contribuições a matemática.

Sua tese de doutorado foi: uma função automorfa f(z) da variável complexa z é uma função que é analítica, excetuados pólos, num domínio D e que é invariante sob um grupo infinito inumerável de transformações lineares fracionarias.

$$z' = \frac{\mathrm{az} + \mathrm{b}}{\mathrm{cz} + \mathrm{d}}$$

Tais funções são generalizadas das funções geométricas e como vemos se a=1=d, c=0 e b é da forma 2kπ e das duas funções elípticas. Poincaré entendeu sua analise a equações de grau mais alto da forma f (x,y,z')=0, f sendo um polinômio. Tratou tais equações considerando a superfície definida por f (x,y,y') = 0. Sendo o p genus da superfície, f o número de focos. N o de nós, e S o de pontos de sela, Boyer (1996) descreve que Poincaré mostrou que

$$N + F – S = 2 – 2p$$

Gauss e Poincaré tinham preferência por teoremas gerais ao invés de casos específicos, os dois contribuíram para uma grande variedade de ramos das ciências da matemática, tais como a geometria não-euclidiana (BOYER, 1996).

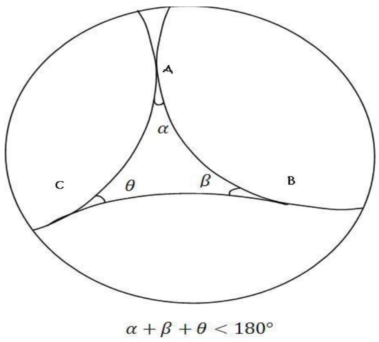
Segundo Rocha (2006), grandes matemáticas em mais ou menos, dois mil anos tentaram provar o postulado das paralelas, que só obteve resultados em 1829, como virmos anteriormente no século XIX com os livros de Lobachevsky (EVES, 1964). Poincaré fez um modelo de disco, como qualquer modelo para esta geometria nada mais é do que um isoformismo.

> Geometria Hiperbólica - modelo de Poincaré (1868). [...] Disco: D = f(x; y) 2 R2 : x2 + y2 < 1g = fz2 C : jzj< 1g [...] "Retas" = diâmetros de D e arcos circulares ortogonais àfronteira de D.Propriedades:1) Existe um único segmento de reta entre cada dois pontosdistintos.2) Qualquer segmento de reta pode ser prolongado para uma reta.3) Dado dois pontos distintos, existe uma circunferência comcentro num e que passa no outro.4) Todos os ângulos retos são congruentes. (Podemos usar transformações de Moebius para comparar figuras.) 5) Dada uma reta e um ponto que não lhe pertence, existem muitas retas que passam nesse ponto e são paralelas àreta inicial. (ABREU, 2010, p8)

A seguir temos um exemplo do modelo de Poincaré, geometria hiperbólica;

- $distância(0,p) = \frac{1}{2}\log(\frac{1+ lPl}{1- lpl})$
- Área(Δ) $= \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$. Em particular, $\alpha + \beta + \gamma < \pi$ e área(Δ) $< \pi$ para qualquer triângulo hiperbólico.(ABREU, 2010).

Figura 3- TRIÂNGULO HIPERBOLICO

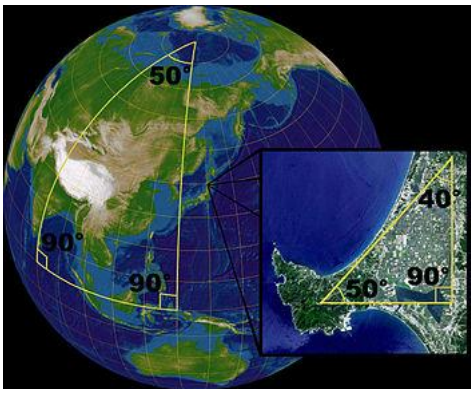


Fonte: (WikimediaCommons.)

Abreu (2012) mostra também a geometria esférica.

Exemplo: Teorema: área(Δ)= $R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$. Em particular, $\alpha + \beta + \gamma > \pi$.

Figura 4- (Fonte: WikimediaCommons).



Fonte: (ABREU, 2012, p. 8)

Em virtude dos fatos mencionados anteriormente, podemos concluir que os grandes matemáticos que se aventuram ao estudo da geometria não-euclidiana, foram sim de grande importância na libertação de uma nova geometria. Sobre o tema o postulado das paralelas ou (quinto postulado de Euclides).

4 A IMPORTÂNCIA DE UMA NOVA GEOMETRIA AOS PROFESSORES E ALUNOS

De acordo com Ribeiro e Gravina(2013), não será fácil mostrar a importância da geometria não-euclidiana para alunos e professores, pois eles usam o método teórico de Euclides. E com essa nova geometria muitos professores terão que ser preparados para seu ensino nas escolas, coisa que não será muito fácil.

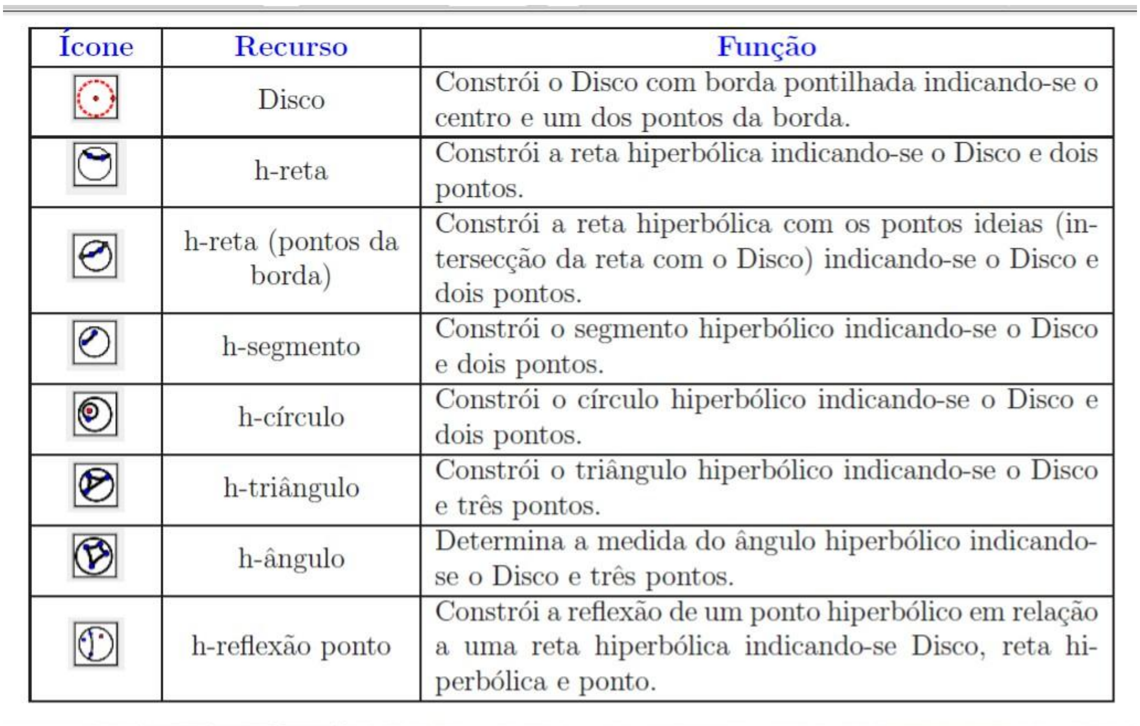
> Algumas pesquisas, que tratam do ensino de geometrias não-euclidianas na escola ea formação de professores, apontam para a importância de incorporar as geometrias não Euclidianasno currículo da matemática escolar, salientando que os futuros professores devam ser preparados paraseu ensino na escola. Alertam para a relevância da formação inicial do professor de Matemática comoo ponto de partida para a efetivação de propostas que visam incluir as Geometrias não Euclidianasna educação básica. Enfatizam, também, a importância da utilização dos ambientes de geometriadinâmica e as interfaces de trabalho por eles disponibilizadas, pois, os mesmos, propiciam a manipulação de objetos concreto-abstrato na tela do computador. Essa manipulação pode preparar o aluno nasua ascensão de patamar de conhecimento, de empírico para aquele inserido no modelo teórico quecaracteriza uma geometria.Neste artigo vamos apresentar uma proposta de ensino que tem como objetivo entendimento dasPrimeirasideias de um modelo teórico que

> não se comporta como o modelo euclidiano (RIBEIRO; GRAVINA, 2013,p. 53)

A nova geometria de fato muito importante, segundo Ribeiro e Gravina (2013), foi criado um micro-mundo “Disco de Poincaré”. Temos no mundo moderno hoje um aplicativo capaz de construir figuras geométricas, tais como para geometria hiperbólica também, como exemplo, ponto, reta passando por dois pontos. Os softwares criados para ajudar na construção de gráficos e figuras geométricas se chama “GeoGebra”, ele também oferece a possibilidade de movimentar as figuras, mudando de tamanho e posição, mas guardando as propriedades geométricas que as caracterizam.

Na tabela a seguir apresentamos as principais ferramentas disponibilizadas no micro-mundo.

Figura 5- Interface GeoGebra com menu hiperbólico (Ferramentas hiperbólicas).



Ícone	Recurso	Função
	Disco	Constrói o Disco com borda pontilhada indicando-se o centro e um dos pontos da borda.
	h-reta	Constrói a reta hiperbólica indicando-se o Disco e dois pontos.
	h-reta (pontos da borda)	Constrói a reta hiperbólica com os pontos ideias (intersecção da reta com o Disco) indicando-se o Disco e dois pontos.
	h-segmento	Constrói o segmento hiperbólico indicando-se o Disco e dois pontos.
	h-círculo	Constrói o círculo hiperbólico indicando-se o Disco e dois pontos.
	h-triângulo	Constrói o triângulo hiperbólico indicando-se o Disco e três pontos.
	h-ângulo	Determina a medida do ângulo hiperbólico indicando-se o Disco e três pontos.
	h-reflexão ponto	Constrói a reflexão de um ponto hiperbólico em relação a uma reta hiperbólica indicando-se Disco, reta hiperbólica e ponto.

É inevitável segundo Ribeiro e Gravina(2013), que na tecnologia de hoje houve mais possibilidades de crescimento, disponibilizando cada vez novas ferramentas para facilitar o estudas das geometrias. O disco de Poincaré disponibiliza uma enorme possibilidade de atividades para escola, em referência as noções básicas.

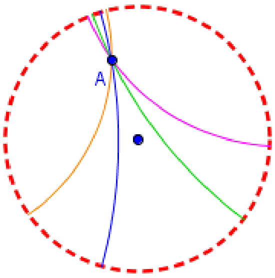
Ribeiro e Gravina(2013), discutiram sobre propostas de ensino, introduzindo as ideias da geometria hiperbólica, veja a seguir:

Primeira atividade:

- Quantas h- retas passam por dois pontos A e B do Disco? Movimente o ponto A e observe o comportamento da h-reta?
- Dado uma h-reta e um ponto P que não pertence a ela, quantas h-retas passa por P e não interceptam a h-reta dada?
- Como podem ser as h-retas paralelas?

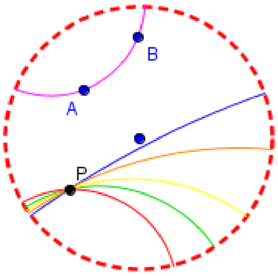
Exemplos:

Figura 6- Retas hiperbólicas passando pelo ponto A



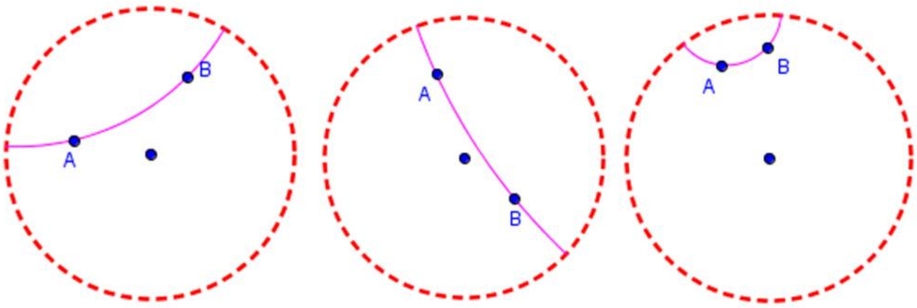
Fonte: (RIBEIRO; GRAVINA, 2013,p. 62)

Figura 7- Retas hiperbólicas passando por P



Fonte: (RIBEIRO; GRAVINA, 2013,p. 62)

Figura 8-Retas hiperbólicas passando por A e B.



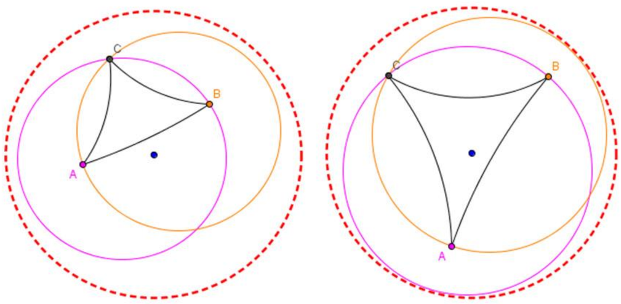
Fonte: (RIBEIRO; GRAVINA, 2013,p.62)

Com essa atividade os alunos vão ter uma nova ideia de reta. Assim como na geometria de Euclides a diferença com a geometria hiperbólica.

Segunda proposta:

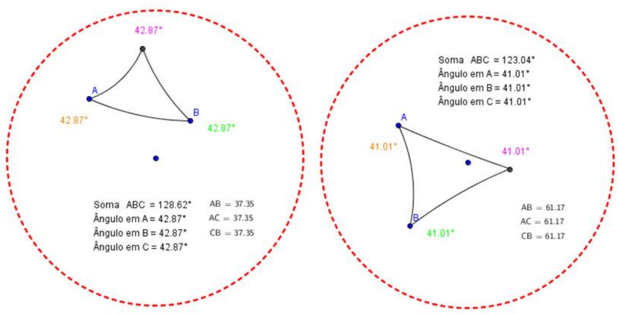
- O conhecido procedimento de construção do triângulo equilátero funciona no Disco? Quando o h-triângulo equilátero se parece com um triângulo euclidiano?
- Como se comporta a medida do h-ângulo de um h-triângulo equilátero?
- Como construir um h-triângulo isósceles? Os h-ângulo da base do h-triângulo são congruentes entre si? Movimente os h-vértice e observe as formas possíveis para um h- triângulo isósceles (RIBEIRO; GRAVINA, 2013,p. 63). Exemplo:

Figura 9- Construção de h-triângulo equilátero a partir da intersecção dos h-círculos.



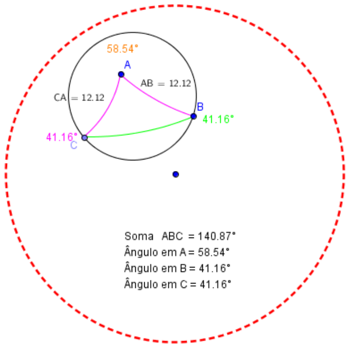
Fonte: (RIBEIRO; GRAVINA, 2013,p. 63)

Figura 10- Medida da soma dos ângulos de h- triângulo equilátero.



Fonte: (RIBEIRO; GRAVINA, 2013,p. 63)

Figura 11- Construção de h-triângulo isósceles e soma dos seus h-ângulo.



Fonte: (RIBEIRO; GRAVINA, 2013,p. 63)

Entende-se que a geometria não euclidiana, pode sim ser implementada a rede de ensino,e com o avanço da tecnologia temos muitas ferramentas para expandir nossos conhecimentos, talvez não seja fácil preparar os professores, mas seria ótimo, mostrar aos alunos uma nova geometria, tão consistente quanto a geometria de Euclides.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em vista dos argumentos defendidos, acredita-se que neste trabalho abordamos o assunto sobre a geometria de Euclides, e sobre o seu quinto postulado ou (postulado das paralelas). Observamos que os grandes gênios da matemática obtiveram resultados excelentes sobre a geometria hiperbólica. Cumprimos todos os objetivos propostos, mostrar a história da geometria não euclidiana. Este trabalho foi muito importante para o aprofundamento deste tema, pois nos permitindo desenvolver e compreender melhor sobre o tema, e a importância de uma nova geometria no ensino fundamental, médio e superior.

REFERÊNCIAS

ABREU, Miguel. Introdução às Geometrias Não-euclidianas. **IInstitutoSuperior Técnico e Sociedade Portuguesa de Matemática,** São PAULO, v. 1, n. 1, p.1-13, fev 2012.

BONGIOVANNI, Vicenzo; JAHN, Ana Paula. De Euclides às geometrias não euclidianas. **Revista Iberoamericana de Educatíon Matemática,** São Paulo, v. 1, n. 22, p.37-51, jun. 2010.

BOYER, Carl. B. **História da Matemática.**2. Ed. São Paulo : EdgardBlucherLatd, 1996. 496 p.

EVES, Howard. **A Introdução à História da Matemática.** Campinas: Unicamp, 1964. 844 p.

ROCHA, Laurindo Daniel Silva da. Um pouco de Geometria Hiperbólica. **Iii Bienal da Sbm - Ime/ufg - 2006,** Goiana, v. 1, n. 1, p.1-3, out. 2006.