### CURSO DE MATEMÁTICA VINÍCIUS DE ALMEIDA FERREIRA

**OS POLIEDROS DE PLATÃO**

**PATOS DE MINAS 2020**

**OS POLIEDROS DE PLATÃO**

Artigo apresentado à Faculdade Patos de Minas como requisito parcial para a conclusão do Curso de Matemática

Orientador: Prof. Me. Túlio Guimarães

### PATOS DE MINAS 2020

OS POLIEDROS DE PLATÃO

Trabalho de Conclusão de Curso aprovado em 26 de novembro de 2020, pela comissão examinadora constituída pelos professores:

Orientador: Prof.º. Me. Túlio Guimarães

Faculdade Patos de Minas

Examinador: Prof. º. Esp. Juliano Soares de Oliveira Faculdade Patos de Minas

Examinador: Prof.ª. Esp. Eremita Marques Nogueira Barbosa Faculdade Patos de Minas

*Dedico este trabalho a toda minha família, em especial minha mãe e minha esposa que me incentivaram desde o início e me apoiaram durante todas as dificuldades do percurso. Também aos meus colegas e professores que levarei pra sempre.*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiro a Deus e a Nossa Senhora Aparecida, que me guiaram e me iluminaram durante minha caminhada de 4 anos para concluir um sonho.

Agradeço a minha família, minha mãe Rosimar, meu pai Cláudio, meus irmãos Leandro e Nathália, minha avó Osvaldina e minha tia avó Maria Zita (carinhosamente chamada de mãe Zita), os quais foram meu motivo de emprenho e dedicação.

Agradeço de forma muito especial minha amada esposa Josiêne, que sempre me incentivou com suas palavras, seus elogios, suas ajudas e desejo de me ver formado. Com absoluta certeza foi a pessoa que esteve mais próximo me ajudando a realizar nosso sonho.

Agradeço à todos os professores e professoras que estiveram comigo durante esses quatro anos de formação, todos foram de suma importância no meu processo de formação.

Agradeço também por todas as dificuldades e situações que foram encontradas durante o curso, pois, por mais que no momento que ocorriam traziam cansaço e desânimo, sempre me tornava mais forte.

Agradeço pela oportunidade de ter encontrado pessoas maravilhosas na faculdade, em especial minha amiga e futura madrinha de casamento Raquel, com quem mais me identifiquei e desenvolvi uma amizade verdadeira.

Agradeço à todo o corpo docente e discente da Escola Estadual “Deiró Eunápio Borges”, que me acolheram durante meus estágios I e II, e pude passar momentos maravilhosos que acrescentaram muito no meu desenvolvimento.

Faço um agradecimento especial à minha amada professora, coordenadora Eremita Marques, em que nesses quatro anos pude vivenciar o que é um profissional que ama o que faz de verdade. Sua dedicação, amor e empenho para que todos os seus alunos do curso de Matemática se desenvolvessem e tivessem a melhor formação foi algo admirável que levarei na memória por toda vida.

Agradeço a instituição Faculdade Patos de Minas – FPM, por poder tornar meu sonho realidade sendo a única instituição da cidade à ofertar meu curso.

*A Matemática é o alfabeto que Deus usou para escrever o universo.*

Galileu Galillei

## OS POLIEDROS DE PLATÃO

**Autor:** Vinícius de Almeida Ferreira

**Orientador:** Túlio Guimarães\*\*

## RESUMO

Este trabalho baseia-se em uma revisão bibliográfica realizada com o intuito de apresentar o estudo feito por Platão a respeito dos poliedros, no qual o objetivo é demonstrar o porquê da limitação de cinco casos específicos de sólidos e suscitar um pouco sobre a história do matemático em questão. O tema “Poliedros de Platão” foi escolhido para esta pesquisa, a fim de trabalhar a Geometria Espacial de uma forma prática, dinâmica, além de facilitar o entendimento por meio de uma linguagem acessível a respeito do assunto. Sendo assim, o objetivo é desmistificar o senso comum a respeito de tal temática que, muitas vezes, é interpretada como algo de difícil compreensão, apresentando nesse trabalho a trajetória de Platão e as características dos poliedros: De Platão, regulares, elementos de um poliedro, relação de Euler e os padrões que podem ser encontrados em tais sólidos.

**Palavras-chave:** Poliedros. Platão. Geometria.

### ABSTRACT

The present assignment was built on a bibliographic analysis executed to convey the study done by Plato on polyhedra of which is to illustrate why the restriction of five particular cases of solids and uplift a chunk regarding the history of the mathematician once mentioned. The matter "Plato's Polyhedra" is here picked out for this research, working on Spatial Geometry in a dynamic, pragmatic course of action, as well as to facilitate comprehension through an accessible language on the content. Taking everything into account, the aim of this article of mine is to elucidate the frequent judgment in respect of this theme, which is frequently expressed as something not easily understood: the Plato's assimilation and the accredit of Plato’s polyhedra: regulars, elements of a polyhedron, Euler's ratio-sum and the patterns that can be found in such solids.

### Keywords:

Polyhedra. Plato. Geometry.

Aluno do Curso de Matemática da Faculdade Patos de Minas (FPM) formando no ano de 2020 e-mail do aluno vinicius.deaf@gmail.com

\*\*Professor de Cálculo Numérico e Análise no curso de Matemática da Faculdade Patos de Minas (FPM). Mestre em Geometria Diferencial pela Universidade Federal de Uberlândia (UFU) e-mail do professor tuliodeguima@hotmail.com

# Explorando os Poliedros

O tema “Poliedros de Platão” foi escolhido para esta pesquisa, a fim de trabalhar a Geometria Espacial de uma forma prática, dinâmica, além de facilitar o entendimento dos leitores sobre o assunto. Desmistificando que poliedros é uma temática difícil de ser compreendida, através do grande filósofo e matemático – Platão, um ateniense que viveu na Grécia antiga por volta do século IV antes de Cristo.

Entende-se também que, através da leitura deste trabalho, o leitor terá um conhecimento sobre Platão ter sido o primeiro filósofo a demonstrar que existem apenas cinco poliedros regulares: tetraedro, cubo, octaedro, icosaedro e dodecaedro, sendo que seus seguidores fizeram estudos intensivos e aprofundados sobre o tema e tornaram-se conhecidos como “Poliedros de Platão”.

Na era de Platão, os gregos tinham a crença de que todos os corpos que residiam em lugar no espaço eram compostos pelos seguintes cinco elementos seguintes: o fogo, o ar, a água, a terra e o cosmo, assim sendo, relacionaram esses elementos aos Poliedros de Platão, em que: o tetraedro seria o fogo, o cubo corresponde à terra, o octaedro ao ar, o icosaedro à água e o dodecaedro o cosmo.

Quando pergunta-se o porquê de serem apenas cinco os sólidos considerados sólidos platônicos, pode-se começar deduzir e imaginar motivos e especificações que limitem este número a cinco.

Pode-se imaginar o simples fato de que os sólidos são regulares ou pode-se levantar certas questões como: números de lados em todas as faces, números de arestas que chegam em todos os vértices, o fato de serem convexos e a simetria existente neles.

Poliedros são uma área da Geometria Espacial que fornece uma ampla malha de conteúdo para explorar as figuras tridimensionais. Eles são sólidos limitados por polígonos que, por sua vez, são limitados por segmentos de reta.

O objetivo do trabalho é realizar uma pesquisa bibliográfica, levantando informações sobre o filósofo e matemático Platão voltadas especificamente ao grupo finito dos sólidos explorados por ele. Também pretende-se demonstrar os critérios específicos que levam a estes sólidos serem considerados os únicos sólidos platônicos e suas características individuais.

A metodologia utilizada é qualitativa, considerando que há uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito, ou seja, que a Geometria está presente no cotidiano e tem um vínculo indissociável entre o mundo objetivo e a subjetividade do sujeito, com coletas de dados através do estudo de vários autores, pesquisa na Internet, livros e revisão de literatura, analisando os dados e destacando seus principais focos de abordagem sobre Poliedros de Platão. Tendo como explanação do tema uma pesquisa bibliográfica, visando a proporcionar maior familiaridade com o tema abordado e reforçando as hipóteses levantadas.

# Platão

Segundo Eves (2011), Platão foi um filósofo e matemático, nascido em Atenas ou aos arredores e que viveu entre 427 a.C. e 347 a.C. Sendo um grande pensador e discípulo do grande filósofo Sócrates, depois de ter estudado filosofia com Sócrates, Platão viajou pelo mundo sempre em busca de novas descobertas e conhecimento.

Durante sua busca ao conhecimento, Platão teve passagens pela costa africana onde estudou matemática com Teodoro de Cirene e criou um vínculo íntimo de amizade com o filósofo, cientista, estratego, estadista, matemático e astrônomo grego, Arquitas de Tarento. Platão criou seu próprio centro de estudos dedicado a investigação filosófica e científica, o qual foi chamado de Academia no ano de 387 a.C, ano este em que retornou à Atenas depois de suas viagens pelo mundo em busca de conhecimento. Sendo o fundador da Academia, Platão esteve à frente da mesma desde a criação, até o ano de sua morte por volta de 347 a.C onde se encontrava com aproximadamente 80 anos de idade. Em outro instante, Eves (2011) cita que a maioria dos trabalhos matemáticos de importância do século IV a.C. foram feitos por amigos próximos ou discípulos de Platão. A importância que Platão teve na matemática não foi devido as suas grandes descobertas, mais pela sua certeza férvida de que estudando matemática, o indivíduo forneceria um primoroso aperfeiçoamento do espírito e que, por isso era indispensável que fosse cultivado pelos filósofos e por aqueles que deveriam governar o seu Estado considerado Ideal. Fato este que explica o famoso lema colocado na entrada de sua academia: “Que aqui não adentrem aqueles não versados em geometria”.

# Elementos e classificação de um poliedro

### Elementos

Os elementos de um poliedro são três: face, vértice e aresta. Onde, faces são os polígonos que limitam o poliedro, arestas são segmentos de reta resultante do encontro de duas faces e vértices são os pontos resultantes do encontro de três ou mais arestas – no caso dos poliedros platônicos, em cada vértice se encontram no mínimo três e no máximo quatro arestas.

Veja o exemplo (Figura1):

Figura 1

Face Aresta

Vértice

Fonte: Elaboração do autor.

### Classificação

Os poliedros se classificam em dois tipos, os convexos e os côncavos (Quadro 1). Um poliedro é convexo se qualquer segmento com extremidades dentro do poliedro estiver totalmente contido no poliedro. Já no poliedro classificado como côncavo, o segmento de reta com extremidades dentro do poliedro deve estar fora do poliedro. Lembre-se que um dos critérios para um poliedro ser considerado de Platão, é ser convexo.

Veja que nos exemplos da imagem abaixo, o poliedro convexo é o hexaedro ou popularmente conhecido como cubo – que é um dos cinco poliedros de Platão.

Quadro 1 – exemplo de poliedro convexo e côncavo

convexo côncavo

Fonte: Elaboração do autor.

# Planificação dos Poliedros de Platão

Como dito anteriormente, os Poliedros de Platão são considerados cinco: o tetraedro, o hexaedro, o octaedro e dodecaedro e o icosaedro. Ao planificar tais poliedros, pode-se trabalhar com o cálculo de área dos polígonos que limitam os poliedros, calcular o perímetro e ter uma melhor visualização sobre os polígonos regulares.

Veja agora a planificação de cada um dos Poliedros de Platão no quadro abaixo:

**Tetraedro** (Figura 2): 4 faces formadas por triângulos equiláteros; cada ângulo mede 60º.

**Hexaedro** (Figura 3): 6 faces formadas por quadrados; cada ângulo interno mede 90º.

**Octaedro** (Figura 4): 8 faces formadas por triângulos equiláteros; cada ângulo mede 60º.

**Dodecaedro** (Figura 5): 12 faces formadas por pentágonos; cada ângulo mede 108º.

**Icosaedro** (Figura 6): 20 faces formadas por triângulos, cada ângulo mede 60º.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |

Figura 2 Figura 3 Figura 4

Figura 5 Figura 6

Fonte: Elaboração do autor.

# Poliedros regulares

Segundo Eves (2011) um poliedro se diz regular se as faces que o compõe são polígonos regulares congruentes e se seus ângulos são todos congruentes. Mesmo sabendo que existem polígonos regulares de todas as ordens, verifica-se que existam apenas cinco poliedros que sejam regulares.

Os poliedros regulares são nomeados conforme o número de face que os compõem. Portanto, do menor para o maior, nomeia-se tetraedro o poliedro que possui quatro faces triangulares, o hexaedro ou cubo, que possui seis faces quadradas, o octaedro que possui oito faces triangulares, o dodecaedro com doze faces pentagonais e por último o icosaedro formado por suas vinte faces triangulares (REIS, 2013). Tais poliedros, são chamados de poliedros de Platão.

Eves (2011) alega que o nome Timeu de Platão é de Timeu de Locri, um Pitagórico com quem provavelmente Platão encontrou-se na Itália. Timeu associava de forma mística os quatro sólidos considerados os mais simples de se construir a quatro elementos, sendo o tetraedro e o fogo, o octaedro e o ar, o icosaedro e a água e por último o cubo e a terra. Platão expunha uma atenção específica ao dodecaedro, perante à forma de como era difcil de apresentá-lo, o associava ao Universo: “Deus usou-o para pintar os animais [estrelas ou constelações, o zodíaco] do universo” (LUNA, 2014, p. 24).

Os Pitagóricos foram responsáveis pela descoberta do tetraedro, do cubo e do dodecaedro, enquanto o responsável pela descoberta do octaedro e do icosaedro foi Teeteto. A questão maior que gira em torno dos poliedros regulares é o porquê de serem cinco os poliedros denominados poliedros de Platão.

Segundo Silva(2014), no último teorema dos elementos de Euclídes (século III a.C), ele demonstra porque existem apenas cinco poliedros de Platão. Em seu teorema, ele demonstra que a existência dos cinco poliedros é baseada no fato de que os ângulos planos que envolvem cada vértice de um poliedro tem a soma menor que 360º.

Outra característica que pode-se citar é que de cada vértice partem, de no mínimo 3 arestas e no máximo de 5 arestas. Dito isso, será analisado nos poliedros de Platão o teorema citado à cima.

Sabendo que os poliedros de Platão são compostos por faces triangulares, faces quadradas e faces pentagonais, as demonstrações a seguir se dividirão em demonstração 1 (poliedros com faces triangulares – tetraedro, octaedro e icosaedro), demonstração 2 (poliedro com face quadrada – hexaedro) e demonstração 3 (poliedro com face pentagonal – dodecaedro).

Demonstração 1, aqui será analisado os poliedros com faces triangulares (Figura7). Lembrando que se trata de poliedros regulares, cada ângulo interno das faces ou polígonos triangulares que os limitam medem 60º, sendo assim, cada vértice dos poliedros pode ser rodeado por três, quatro ou cinco faces triangulares.

Figura 7 – Faces do tetraedro, octaedro e icosaedro respectivamente ao redor do vértice.

Fonte: Elaboração do autor.

Analisando o vértice central destacado de cada figura acima temos, 3x60º=180º, 4x60º=240º e 5x60º=300º, onde o produto de tais multiplicações resultam em um ângulo menor que 360º. Atente-se que se for colocado seis triângulos equiláteros contornando um vértice, teremos 6x60º = 360º, o que tornaria tal figura um plano, não podendo ser considerado um vértice de um poliedro. Consequentemente qualquer quantidade acima de 6 faces triangulares, também não seria possível ser um vértice de um poliedro.

Analisado as figuras acima, pode-se afirmar que os poliedros platônicos com faces triangulares limitam-se em três (Quadro 2).

Quadro 2 – Tetraedro, octaedro e icosaedro respectivamente

**(4 faces triangulares) (8 faces triangulares) (20 faces triangulares)**

Fonte: Elaboração do autor.

Apresentadas todas as possibilidades de poliedros regulares formados por triângulos, será apresentado a próxima demonstração com faces quadradas ao redor do vértice (Figura 8).

Se tratando de faces quadradas, pode-se afirmar que cada ângulo interno de uma face mede 90º, sendo assim, em cada vértice do poliedro poderá haver apenas três faces quadradas.

Figura 8 – Faces do hexaedro ao redor do vértice.

Fonte: Elaboração do autor.

A explicação é que 3x90º resulta em 270º, ou seja, um ângulo menor que 360º. Suponha-se que seja quatro o número de faces quadradas ao redor do vértice, isso resultaria em 4x90º=360º, ou seja, se tornaria um plano, impossibilitando ser um vértice de poliedro. Consequentemente qualquer quantidade acima de quatro faces quadradas, não possibilitaria ser vértice de um poliedro. Sendo assim, com faces quadradas existe apenas um poliedro platônico – o hexaedro (Quadro 3).

Quadro 3 – Hexaedro ou cubo.

**(6 faces quadradas)**

Fonte: Elaboração do autor.

Dando sequência às demonstrações, será apresentado o poliedro composto por faces pentagonais. Sendo a face pentagonal, considera-se que cada ângulo interno meça 108º, assim sendo, haverá no máximo três faces pentagonais ao redor de cada vértice do poliedro (Figura 9).

Figura 9 – Faces do octaedro ao redor do vértice.

Fonte: Elaboração do autor.

Analisando os ângulos ao redor do vértice, tem-se 3x108º, o que resulta como produto 324º, ou seja, um ângulo menor do que 360º. Observe que, se colocado qualquer quantidade acima de três faces pentagonais ao redor de um vértice, isso impossibilita a construção do poliedro, pois, exemplo: 4x108º=432º, ou seja, um ângulo maior que 360º. Feito essa análise, conclui-se que o dodecaedro (Quadro 4) é o único poliedro platônico com faces pentagonais possível de ser construído.

Quadro 4 – Dodecaedro

**(12 faces pentagonais)**

Fonte: Elaboração do autor.

Seguindo com o estudo de faces dos poliedros regulares, a face hexagonal seria a próxima a ser apresentada. Todavia, se um poliedro é composto por faces hexagonais, seus ângulos internos possuem a medida de 120º cada um. Considerando o critério de que cada vértice de um poliedro regular concorre ao menos três polígonos, tem-se, 3x120º=360º, fato este que impossibilita a construção (Figura10).

Figura 10 – Faces hexagonais ao redor do vértice formando 360º.

Fonte: Elaboração do autor.

Analisando de forma análoga, nota-se que não será possível a realização de outras quaisquer construções, sendo a face pentagonal a maior possível. Assim sendo, os cinco poliedros de Platão.

# Relação de Euler

Leonhard Euler foi um matemático suíço que criou uma importantíssima relação ou teorema – a qual leva seu nome, Relação de Euler, utilizada para determinar do número de faces, vértices e arestas, de alguns poliedros não convexos e de qualquer poliedro convexo. Assim sendo, essa relação permite realizar cálculos com a finalidade de demonstrar o número de elementos de um poliedro (SILVA, 2020). A Relação de Euler, se dá pela fórmula (Quadro 5):

Quadro 5 – Relação de Euler

V-A+F = 2

V = Vértice A = Aresta F = Face

Fonte: Elaboração do autor.

Agora, será demonstrada a aplicação da Relação de Euler nos Poliedros platônicos, confirmando que a relação se aplica à todos. Em todos os exemplos a seguir, será usado o vértice como valor a ser descoberto.

1º Exemplo – Tetraedro:

Faces: 4

Arestas: 6

Vértices: 4

V – A + F = 2 V – (6) + 4 = 2

V = 2 + 6 – 4

V = 4

Fonte: Elaboração do autor.

2º Exemplo – Hexaedro:

Faces: 6

Arestas: 12

Vértices: 8

V – A + F = 2 V – (12) + 6 = 2

V = 2 + 12 – 6

V = 8

Fonte: Elaboração do autor.

3º Exemplo – Octaedro:

Faces: 8

Arestas: 12

Vértices: 6

V – A + F = 2 V – (12) + 8 = 2

V = 2 + 12 – 8

V = 6

Fonte: Elaboração do autor.

4º Exemplo – Dodecaedro:

Faces: 12

Arestas: 30

Vértices: 20

V – A + F = 2

V – (30) + 12 = 2

V = 2 + 30 – 12

V = 20

Fonte: Elaboração do autor.

5º Exemplo – Icosaedro:

Faces: 20

Arestas: 30

Vértices: 12

V – A + F = 2 V – (30) + 20 = 2

V = 2 + 30 – 20

V = 12

Fonte: Elaboração do autor.

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Platão indiscutivelmente foi um grande nome da matemática, representando-a em todo mundo através de sua fervorosa busca pelo estudo e reconhecimento da mesma, segundo Platão, através do estudo da matemática o indivíduo alcançaria o aperfeiçoamento do espírito. Através de seus estudo sobre os poliedros, pode-se ver o quão complexo e maravilhoso é esta parte da geometria.

Este trabalho foi construído com o intuito de auxiliar aqueles que tenham interesse em realizar um estudo sobre os poliedros de Platão, apresentando uma linguagem de fácil entendimento e imagens ilustrativas para que juntos possam resultar uma aprendizagem significativa para os que fizerem a leitura do mesmo.

Acredita-se que apresentando uma introdução sobre a caminhada de Platão em busca do conhecimento, apresentando dentro dos poliedros seus elementos e classificação, suas planificações, a definição dos poliedros regulares e a relação de Euler, o trabalho tenha alcançado seu objetivo inicial em apresentar as características e critérios que levaram um infinito conjunto de poliedros serem reduzidos à cinco únicos devido suas singularidades – os chamado “Poliedros de Platão”.

## REFERÊNCIAS

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** 5. ed. Campinas: UNICAMP, 2011.

LUNA, Marcelo de Oliveira. **ESTUDO DOS ORIGAMIS DOS POLIEDROS DE**

**PLATÃO**. 2014. 98 f. TCC (Doutorado) - Curso de Matemática, Matemática, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2014.

REIS, Edvaldo Araújo dos. **Os Poliedros de Platão**. 2013. 27 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Profmat, São Cristóvão, 2013.

SILVA, Marcos Noé Pedro da. **Relação de Euler**. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/relacao-euler.htm. Acesso em: 19 set. 2020.

SILVA, José Kilmer Tavares. **UM ESTUDO COMPLEMENTAR DOS POLIEDROS VOLTADO PARA PROFESSORES E ALUNOS DO ENSINO BÁSICO**. 2014. 69 f.

Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza, 2014.